JGP - Vol. 6, n. 4, 1989

Le théorème de réduction de Marsden-Weinstein en géométrie cosymplectique et de contact

CLAUDE ALBERT

Institut de Mathématiques
GDR 144 du CNRS
Place E. Bataillon
F-34060 – Montpellier, Cedex

Abstract. *We show that the classical Marsden-Weinstein Reduction theorem for Hamiltonian systems with symmetries is still true for contact manifolds and cosymplectic manifolds (i.e. canonical manifolds in the sense of A. Lichnerowicz).*

In fact, we precise the notion of transitive almost contact structure, which enables us to consider the cosymplectc geometry as a limit of the contact geometry when a certain parameter goes to zero. This point of view unifies both theories.

However, we have to give two distinct proofs for the contact Reduction theorem and the cosymplectic one.

INTRODUCTION

On connaît l'importance en géométrie symplectique du théorème de Réduction de l'espace des phases de Marsden-Weinstein [11] qui permet, si l'on dispose d'un groupe de symétries de la structure respectant le hamiltonien, de voir la variété comme une réunion d'orbites contenant le flot du champ de vecteurs hamiltonien, les orbites régu -lière (en un certain sens) étant des fibrés principaux dont les bases sont des variétés symplectiques sur lesquelles le hamiltonien est projetable.

Il s'agit dans ce papier de donner une version de ce théorème pour les variétés de contact et les variétés cosymplectiques (ou variétés canoniques).

Key-Words: Symplectic manifold. Contact manifold. Cosymplectic manifold. Reduction theorem. Principal structure.

1980 MSC: 58. 53.

Le parti pris systématique est d'utiliser la notion de «structure de presque contact transitive» qui permet de regarder les structures cosymplectiques comme obtenues en quelque sorte par dégénérescence des structures de contact. Dans cette optique, la géométrie hamiltonienne des structures de contact permet, par passage à la limite, de retrouver la géométrie correspondante des structures cosymplectiques.

1. GÉNÉRALITÉS SUR LES STRUCTURES DE PRESQUE CONTACT

Soit V une variété de dimension $2n+1$. Une *structure de presque contact* sur V est la donnée d'un couple (θ, ω) où θ est une 1-forme et ω une 2-forme sur V telles que $\theta \wedge \omega^n$ soit une forme volume sur V. On notera pour $p \geq 0$, $A^p(V)$ le $A^0(V)$-module des p-formes sur V, et $\mathcal{H}(V)$ le $A^0(V)$-module des champs de vecteurs.

Si (θ, ω) est une structure de presque contact sur V, un champ de vecteurs $X \in \mathcal{H}(V)$ est parfaitement défini par les formes

$$i_X\theta \qquad \text{et} \qquad i_X\omega$$

En particulier, le champ de vecteur R défini par

$$i_R\theta \qquad \text{et} \qquad i_R\omega$$

est appelé le *champ de Reeb* de la structure de presque contact. Il n'a pas de singularité, et définit donc un feuilletage $\mathcal{D}$ de dimension 1 appelé *flot dynamique* de (V, θ, ω). En tout point $x \in V$, $\ker \theta_x$ est un hyperplan de T_xV transverse à $T_x\mathcal{D}$, appelé *hyperplan horizontal*. La restriction de ω_x à cet hyperplan est de rang $2n$: on dira que le feuilletage $\mathcal{D}$ est *transversalement presque symplectique*.

EXEMPLE 1. Si (W, ω_w) est une variété symplectique, on munit $V = \mathbf{R} \times W$ de la 1-forme $\omega = pr_2^*\omega_w$. Alors (θ, ω) est une structure de presque contact sur V. Le champ de Reeb s'écrit ici $R = \dfrac{\partial}{\partial t}$ dans la décomposition $TV = T\mathbf{R} \oplus TW$. Les feuilles du flot dynamique sont les sous-variétés $\mathbf{R} \times \{x\}$ où $x \in V$, et la structure presque symplectique transverse est intégrable puisqu'elle se réduit à la structure ω_w sur les «tranches» $\{t\} \times W$.

EXEMPLE 2. Si θ est une forme de contact sur V, le couple (θ, ω) où $\omega = -d\theta$ est une structure de presque contact, dite associée à θ. Le champ de Reeb est ici le système dynamique de la variété de contact [14].

PROPOSITION 1. *Soit sur V une structure de presque contact (θ, ω). Alors l'application $\flat : TV \to T^*V$ définie par $X \mapsto X^\flat = i_x\theta.\theta + i_x\omega$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que pour tout $x \in V, \flat$ définit un isomorphisme de T_xV sur T_x^*V. Or si $X \in T_xV$ est tel que $i_X\theta_x.\theta_x + i_X\omega_x = 0$, on obtient en appliquant les deux membres à R_x : $\theta_x X = 0$ et $i\omega_x = 0$. Donc $X = 0$. ∎

En particulier, on a $R^\flat = \theta$.

PROPOSITION 2. *Soit sur une variété V un couple (θ, ω) où $\theta \in A^1(V)$, $\omega \in A^2(V)$, tel que l'application $\flat : TV \to T^*V$ définie par $X^\flat = i_X\theta.\theta + i_X\omega$ soit un isomorphisme de fibrés vectoriels. Alors*

– ou bien V est de dimension paire et (V, ω) est une variété presque symplectique.

– ou bien V est de dimension impaire, et (V, θ, ω) est une variété de presque contact.

En particulier, s'il existe sur V un champ R tel que $i_R\theta = 1$ et $i_R\omega = 0$, on est nécessairement dans le second cas.

DÉMONSTRATION. Soit R le champ de vecteurs défini sur V par la condition $R^\flat = \theta$. On a alors $\theta R = (\theta R)^2$ de sorte que la fonction θR ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

Supposons V connexe. Si $\theta R = 0$, on a $\theta = i_R\omega$ et donc si $X \in TV$

$$X^\flat = i_{\theta X.R+X}\omega$$

Donc l'application $TV \to T^*V$ qui à associe $i_X\omega$ est bijective: ω est donc de rang maximum, et (V, ω) est presque symplectique. Si $\theta R = 1$, θ est sans singularité sur V et sur l'hyperplan $\ker\theta_x, \omega_x$ est de rang maximum, car l'application $\ker\theta_x \to T_x^*V$ qui à X associe $i_X\omega$ est injective, et à valeurs dans l'annulateur du sous espace engendré par R_x, (qui est transverse à $\ker\theta_x$). Donc V est de dimension impaire $2n+1$, et $\theta \wedge \omega^n$ est une forme volume sur V.

Si V n'est pas connexe, le raisonnement ci-dessus s'applique sur toute composante connexe, et comme la dimension de chaque composante connexe est la même, on a le résultat.

Enfin le dernier point résulte de la démonstration ci-dessus. ∎

Si (V, θ, ω) est une variété de presque contact, on note

$$\# : T^*V \to TV \qquad \alpha \mapsto \alpha^\#$$

l'isomorphisme réciproque de $\flat$.

2. STRUCTURES TRANSITIVES

Une structure de presque contact (θ, ω) sur V est une *structure principale*: si $x \in V$, un repère $(X_0, X_1, \ldots, X_{2n})$ en x est dit *adapté* à (θ, ω) si le repère dual $(\theta^0, \ldots, \theta^{2n})$ vérifie

$$\theta_x = \theta^0 \qquad \text{et} \qquad \omega_x = \theta^1 \wedge \theta^{n+1} + \ldots + \theta^n \wedge \theta^{2n}$$

de sorte que $R_x = X_0$.

L'ensemble des repères adaptés aux divers points de V constitue une CT_n-structure sur V, où CT_n est le *groupe de contact* sur $\mathbf{R}^{2n+1}$, c'est-à-dire le sous-groupe des matrices de GL_{n+1} de la forme

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \bar{a} \in SP_n$$

[de sorte que CT_n est isomorphe au groupe symplectique SP_n].

La donnée de (θ, ω) èst donc equivalente à celle d'une CT_n-structure E sur la variété V.

Notons Γ le pseudogroupe des difféomorphismes locaux de V qui respectent la structure (θ, ω) :

$$\Gamma = \{\varphi \in \mathrm{Diff}\{V\} | \varphi^*\theta = \theta \qquad \text{et} \qquad \varphi^*\omega = \omega\}.$$

Si $\varphi \in \Gamma$, son relèvement naturel dans le fibré des repères de V respecte le CT_n-fibré E. En suivant la terminologie usuelle des structures principales [3] on dira que (θ, ω) [ou E] est *homogène* si l'action de Γ est transitive sur la variété V [c'est-à-dire si étant donné $(x, y) \in V \times V$, il existe un $\varphi \in \Gamma$ de source x et but y]. On dira que (θ, ω) [ou E] est *transitive* si l'action de Γ est transitive sur le fibré E. Cette dernière condition est beaucoup plus forte que la précédente, et le théorème suivant donne un modèle local pour les structures la vérifiant [13].

THEOREME 1. *Soit (V, θ, ω) une structure de presque contact transitive. Alors la forme ω est fermée, et il existe un réel ϵ tel que $\mathrm{d}\theta = -\epsilon\omega$. De plus, il existe au voisinage de chaque point $x \in V$ un système de coordonnées locales $(t, q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ [en abrégé (t, q, p)] telle que, avec les conventions usuelles sur les indices*

$$\theta = \mathrm{d}t + \epsilon p_i \mathrm{d}q^i \qquad et \qquad \omega \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$$

DÉMONSTRATION. C'est un calcul de tenseur de structure [3]. Puisque E est transitive, son tenseur de structure est constant et invariant par le groupe CT_n. Or, si $\underline{\underline{ct}}_n$ est l'algèbre de Lie de CT_n, on a la suite exacte

$$0 \to \underline{\underline{ct}}_n^{(1)} \to \mathbb{R}^{2n+1*} \otimes \underline{\underline{ct}}_n \xrightarrow{\partial} \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n+1*} \otimes \mathbb{R}^{2n+1}$$
$$\xrightarrow{\mu} \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n+1*} \oplus \Lambda^3 \mathbb{R}^{2n*} \to 0$$

où ∂ est l'opérateur d'antisymétrisation de Spencer, et μ est défini de la façon suivante: soit $(e_0, e_1, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$: si $u \in \mathbb{R}^{2n+1}$, on note $u = u^0 e_0 + \overline{u}$ où $\overline{u}$ est la projection de u sur le sous-espace $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}(e_1, \ldots, e_{2n})$. Si $\alpha \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n+1}$ on aura ainsi, pour $u, v \in \mathbb{R}^{2n+1}$ $\alpha(u,v) = \alpha^0(u,v) e_0 + \bar{\alpha}(u,v)$. Ceci dit on aura

$$\begin{aligned}
\mu = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 \text{ où } \quad & \mu_0 : \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n+1*} \otimes \mathbb{R}^{2n+1} \to \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n+1*} \\
& \mu_1 : \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n+1*} \otimes \mathbb{R}^{2n+1} \to \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n*} \\
& \mu_2 : \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n+1*} \otimes \mathbb{R}^{2n+1} \to \Lambda^3 \mathbb{R}^{2n*} \\
\text{sont définies par} \quad & (\mu_0 \alpha)(u,v) = \alpha^0(u,v) \\
& (\mu_1 \alpha)(\overline{u}, \overline{v}) = \omega_0(\overline{\alpha}(e_0, \overline{u}), \overline{v}) \\
& + \omega_0(\overline{u}, \overline{\alpha}(e_0, \overline{v}) \\
& (\mu_2 \alpha)(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = \underset{u,v,w}{S} \omega_0(\overline{\alpha}(\overline{u}), \overline{v}), \overline{w})
\end{aligned}$$

où ω_0 est la forme symplectique standard ($\omega_0 = du^1 \wedge du^{n+1} + \ldots + du^n \wedge du^{2n}$) sur $\mathbb{R}^{2n}$, et le symbole S indique la sommation sur les permutations circulaires.

De plus, cette suite exacte est une suite exacte de CT_n-modules, pour l'action naturelle de CT_n sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ et les tenseurs associés. Le tenseur de structure τ de E doit donc avoir 3 composantes (τ_0, τ_1, τ_2) invariantes par CT_n : il existe donc deux réels $\epsilon_1 \epsilon_2$ tels que

$$\begin{aligned}
& \tau_0 = \epsilon_1 \omega_0 \quad (\omega_0 \text{ considérée comme 2-forme sur } \mathbb{R}^{2n+1} \supset \mathbb{R}^{2n}) \\
& \tau = \epsilon_2 \omega_0 \\
\text{et} \quad & \tau_2 = 0
\end{aligned}$$

Pour préciser la nature géométrique des 3 composantes du tenseur de structure, utilisons une connexion linéaire ∇ sur V adaptée à E. ($\nabla\theta = 0$ et $\nabla\omega = 0$), et soit T son tenseur de torsion: si $X, Y \in \mathcal{H}(V)$

$$T(X,Y) = \nabla_x Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

Si $x \in V$, soit $\sigma : U \to E$ une section locale de E, c'est-à-dire un champ $(X_0, X_1, \ldots, X_{2n})$ de repères adaptés. On peut, pour tout $u \in \mathbb{R}^{2n+1}$ lui associer le champ de vecteurs $\sigma.u \in \mathcal{H}(U)$ défini par

$$\text{si} \quad u = \sum_{0 \leq i \leq 2n} u^i e_i, \qquad \sigma \cdot u = \sum_{0 \leq i \leq 2n} u^i X_i$$

Au tenseur $T|_U$ correspond un tenseur α sur $\mathbf{R}^{2n+1}$ défini par

$$\sigma.\alpha(u,v) = T(\sigma.u,\sigma.v)$$

et le tenseur de structure τ a alors au point x la valeur $\tau(x) = \mu(\alpha_x)$. On a donc

$$\begin{aligned}\mu_0(\alpha)(u,v) &= \alpha_0(u,v) = \theta^0(\alpha(u,v)) = \\ &= \theta(T(\sigma.u,\sigma.v) = \mathrm{d}\,\theta(\sigma.u,\sigma.v)\end{aligned}$$

car $\nabla\theta = 0$.

$$\begin{aligned}\mu_1(\alpha)(\overline{u},\overline{v}) &= \omega_0(\alpha(e_0,\overline{u},\overline{v}) + \omega_0(\overline{u},\alpha(e_0,\overline{v})) \\ &= \omega(T(R,\sigma.\overline{u}),\sigma.\overline{v}) + \omega(\sigma.\overline{u},T(R,\sigma.\overline{v})) \\ &= (\mathcal{L}_R\omega)(\sigma.\overline{u},\sigma.\overline{v})\end{aligned}$$

car $\nabla R = 0$
et enfin

$$\begin{aligned}\mu_2(\alpha)(\overline{u},\overline{v},\overline{w}) &= \underset{u,v,w}{\mathrm{S}}\ \omega_0(\alpha(\overline{u},\overline{v}),\overline{w}) = \underset{u,v,w}{\mathrm{S}}\ \omega(T(\sigma.\overline{u},\sigma.\overline{v}),\sigma.\overline{w}) \\ &= \mathrm{d}\,\omega(\sigma.u,\sigma.v,\sigma.w).\end{aligned}$$

En d'autres termes, les trois composantes sont les tenseurs associés aux formes $\mathrm{d}\,\theta, \mathcal{L}_R\omega$, et $\mathrm{d}\,\omega$, de sorte que les relations ci-dessus s'écrivent

$$\begin{cases}\mathrm{d}\,\theta = \epsilon_1\omega \\ \mathcal{L}_R\omega = \epsilon_2\omega \\ \mathrm{d}\,\omega = 0\end{cases}$$

Comme $\mathcal{L}_R\omega = \mathrm{d}\,i_R\omega + i_R\mathrm{d}\,\omega$, la troisième implique $\epsilon_2 = 0$, et il reste donc, en posant $\epsilon = -\epsilon_1$

$$\begin{cases}\mathrm{d}\,\theta = -\epsilon\omega \\ \mathrm{d}\,\omega = 0\end{cases}$$

Si $\epsilon = 0$, θ et ω sont fermées toutes les deux. La structure E est alors plate (V,θ,ω) est une *structure cosymplectique* au sens de P. Libermann [5], ou encore une *variété canonique* au sens de A. Lichnerowicz [8]. Les noyaux des formes θ et ω définissent sur V deux feuilletages transverses [autrement dit une structure presque produit] et le théorème de Darboux donne le modèle local

$$\theta = \mathrm{d}\,t \qquad \omega = \mathrm{d}\,q^i \wedge \mathrm{d}\,p_i$$

Si $\epsilon \neq 0$, θ est une *forme de contact* sur V. En remplaçant au besoin E par une structure conjuguée, on peut se ramener au cas $\epsilon = 1$. La théorème de Darboux donne encore le modèle local

$$\theta = \mathrm{d}\,t + \epsilon p_i \mathrm{d}\,q^i \qquad \omega = \mathrm{d}\,q^i \wedge \mathrm{d}\,p_i.$$

∎

REMARQUE 1. $\epsilon \in \mathbf{R}$ étant donné, définissons sur $\mathbf{R}^{2n+1}$ le crochet $[\ ,\ ]$ par

$$\begin{array}{ll} [e_0, e_i] = 0 & 0 \leq i \leq 2n \\ \left.\begin{array}{l} [e_i, e_j] = 0 \\ [e_i, e_{n+j}] = \epsilon\delta_1^j e_0 \\ [e_{n+i}, e_{n+j}] = 0 \end{array}\right\} & \text{si} \quad 1 \leq i,\ j \leq n \end{array}$$

On obtient ainsi une structure d'algèbre de Lie $\underline{\underline{h}}_n(\epsilon)$ sur $\mathbf{R}^{2n+1}$, abélienne si $\epsilon = 0$, isomorphe à l'algèbre de Heisenberg $\underline{\underline{h}}_n$ si $\epsilon \neq 0$. Il est facile de voir que la discussion ci-dessus revient à dire que si $d\theta = -\epsilon$, *la structure* E *est* $\underline{\underline{h}}_n(\epsilon)$*-plate* au sens de [2].

La constante ϵ qui apparaît au niveau de τ sera appelée dans la suite *constante de structure* de (θ, ω).

REMARQUE 2. Si l'on demande simplement à (θ, ω) d'être homogène, la situation peut ête très éloignée des modèles des exemples 1 et 2. Prenons par exemple pour variété V le groupe de Lie produit direct $GA_1 \times \mathbf{R}$ où GA_1 est le groupe des transformations affines de la droite réelle. Une base de l'espace des 1-formes invariantes à gauche sur V est $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ où la différentielle est donnée par $d\theta^1 = -\theta^1 \wedge \theta^2$ et $d\theta^i = 0$ si $i > 1$. Prenons alors $\theta = \theta^1, \omega = a\theta^1 \wedge \theta^2 + b\theta^1 \wedge \theta^3 + \theta^2 \wedge \theta^3 (a, b \in \mathbf{R})$. Alors (θ, ω) est une structure de presque contact homogène sur V. Si $b \neq 0$, ω n'est pas fermée et ni $d\theta$, ni $\mathcal{L}_R\omega$ ne sont colinéaires à ω.

3. GÉOMÉTRIE DES STRUCTURES DE PRESQUE CONTACT TRANSITIVES

Soit sur V une structure de presque contact (θ, ω) transitive, de constante de structure ϵ. On a donc

$$(1) \qquad \begin{cases} d\theta = -\epsilon\omega \\ d\omega = 0 \end{cases}$$

Les isomorphismes musicaux

$$TV \underset{\#}{\overset{\flat}{\rightleftarrows}} T^*V$$

permettent de définir, pour chaque fonction $f \in A^0(V)$, le *gradient de* f : c'est le champ de vecteurs grad $f = df^\#$, c'est-à-dire

$$(2) \qquad \begin{cases} i_{\text{grad } f}\theta = Rf \\ i_{\text{grad } f}\omega = df - Rf.\theta \end{cases}$$

On définit aussi le *champ de vecteur hamiltonien* X_f *associé à* f.

(3) $$\begin{cases} i_{X_f}\theta = \epsilon f \\ i_{X_f}\omega = \mathrm{d}f - Rf.\theta \end{cases}$$

grad f et X_f ont donc la même composante horizontale. [Pour une manière naturelle de définir X_f, voir par exemple Arnold [4] dans le cas des structures de contact].

Un difféomorphisme [local] φ de V sera appelé *automorphisme faible* de la structure s'il existe une fonction h_φ [définie sur le même ouvert que φ] telle que

(4) $$\begin{cases} \varphi^*\theta = e^{\epsilon h_\varphi}\theta \\ \varphi^*\omega = e^{\epsilon h_\varphi}(\omega - \mathrm{d}\,h_\varphi \wedge \theta) \end{cases}$$

Cela signifie que, à un coefficient de conformité près, φ respecte θ et la 2-forme induite par ω sur le champ d'hyperplans $\ker\theta$. Les automorphismes (par opposition on pourra préciser *automorphismes forts*) de la structure (θ,ω) sont les automorphismes faibles φ qui correspondent à $h_\varphi = 0$.

Dans le cas cosymplectique $(\epsilon = 0)$ les automorphismes faibles sont aussi appelés *transformations canoniques* ([8], [9]). Dans le cas contact $(\epsilon \neq 0)$ ce sont les *transformations de contact*: ils sont alors caractérisés par la première des relations (4).

De manière analogue, si Z est un champ de vecteurs [local] sur V, on dira qu'il est un *automorphisme infinitésimal faible* s'il existe une fonction h_Z [définie sur le même ouvert que Z] telle que

(5) $$\begin{cases} \mathcal{L}_Z\theta = \epsilon h_Z\theta \\ \mathcal{L}_Z\omega = \epsilon h_Z\omega - \mathrm{d}\,h_Z \wedge \theta \end{cases}$$

Les *automorphismes infinitésimaux [forts]* sont les automorphismes infinitésimaux faibles Z qui correspondent à $h_Z = 0$. Ceci étant, on a

PROPOSITION 3. *Pour toute* $f \in A^0(V)$, *le champ hamiltonien* X_f *associé est un automorphisme infinitésimal faible de* (θ,ω). *De plus l'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens est un idéal de l'algèbre de Lie* $\mathcal{L}'(V)$ *de automorphismes infinitésimaux faibles globaux de* (θ,ω), *qui coincide avec* $\mathcal{L}'(V)$ *si* $\epsilon \neq 0$.

Ce dernier point est un résultat de P. Libermann [5]

DEMONSTRATION. Le premier point est une vérification élémentaire, qui conduit à

(6) $$h_{X_f} = Rf$$

On a donc une application $X_{\_} : A^0(V) \to \mathcal{L}'(V)$ définie par $f \mapsto X_f$. Si $\epsilon \neq 0$, cette application est bijective, car si $Z \in \mathcal{L}'(V)$, on a $Z = X_f$ avec $f = \frac{1}{\epsilon}\theta Z$. Si $\epsilon = 0, X_{\_}$ n'est pas injective car son noyau contient les constantes; elle n'est pas non plus surjective car R est un automorphisme infinitésimal qui n'est pas dans ce cas un hamiltonien. Si $Z \in \mathcal{L}'(V)$, on a cependant

(7) $$[R, Z] = X_{h_Z}$$

et par conséquent pour tout $f \in A^0(V)$

$$X_f h_Z = [Z, R] f$$

ce qui permet de voir que

(8) $$[Z, X_f] = X_{Zf}$$

■

PROPOSITION 4. *Il existe sur $A^0(V)$ une structure d'algèbre de Lie $\{\ ,\ \}$ telle que pour toutes fonctions f, g on ait*

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$$

DÉMONSTRATION. Si $\epsilon \neq 0$, l'isomorphisme $X_{\_} : A^0(V) \to \mathcal{L}'(V)$ permet d'obtenir $\{\ ,\ \}$ par transport de la structure d'algèbre de Lie de $\mathcal{L}'(V)$: on posera donc

(9) $$\{f, g\} = X_g f - \epsilon f.Rg$$

ou encore, de manière plus symétrique, en tenant compte du fait que $\mathrm{d} f = i_{X_f}\omega - Rf\theta$:

(9′) $$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) + \epsilon(gRf - fRg)$$

Si l'on tient compte du fait que $i_{X_f}\omega = i_{\mathrm{grad}\, f}\omega$, cette relation s'écrit encore

(9″) $$\{f, g\} = \omega(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g) + \epsilon(g\theta(\mathrm{grad}\, f) - f\theta(\mathrm{grad}\, g))$$

de sorte que le crochet $\{\ ,\ \}$ n'est autre que le *crochet de Jacobi* introduit par A. Lichnerowicz sur les structures de contact [7].

Si $\epsilon = 0$, la solution n'est plus unique, mais la relation (9) définit encore une structure d'algèbre de Lie sur $A^0(V)$ telle que l'on ait

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f,g\}}$$

La valeur de $\{f, g\}$ en $x \in V$ ne dépend pas alors que des 1-jets $j_x^1 f$ et $j_x^1 g$, mais de façon précise des différentielles $\mathrm{d} f_x$ et $\mathrm{d} g_x$: le crochet $\{\ \}$ est alors un *crochet de Poisson* sur $A^0(V)$ [16]. La structure de Poisson $(A^0(V), \{\ \})$ est alors une structure régulière dont le noyau est formé des fonctions $f \in A^0(V)$ dont la différentielle $\mathrm{d} f$ est en point vertical [c'est-à-dire colinéaire à θ]. ■

PROPOSITION 5. *Soient $x \in V$ et (t,q,p) un système de coordonnées canonique en x [c'est-à-dire tel que θ et ω s'écrivent comme annoncé dans le théorème 1]. On a alors les expressions locales:*

$$\theta = \mathrm{d}t + \epsilon p_i \mathrm{d}q^i$$

$$\omega = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i$$

$$R = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \epsilon p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\epsilon p_i \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\right)\frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$X_f = \epsilon\left(f - p_i \frac{\partial f}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\epsilon p_i \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\right)\frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\{f,g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial q}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}\right) + \epsilon\left(p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial t} - p_i \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \epsilon\left(f\,\frac{\partial g}{\partial t} - g\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

En particulier

$$\begin{array}{ll}
\operatorname{grad} q^i = -\dfrac{\partial}{\partial p_i} & \{q^i, q^j\} = 0 \\
\operatorname{grad} p_i = -\epsilon p_i \dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial q^i} & \{p_i, p_j\} = 0 \\
\operatorname{grad} t = \dfrac{\partial}{\partial t} + \epsilon p_i \dfrac{\partial}{\partial p_i} & \{q^i, p_j\} = \delta^i_j \\
X_{q^i} = -\dfrac{\partial}{\partial p_i} + \epsilon q^i \dfrac{\partial}{\partial t} & \{q^i, t\} = -\epsilon q^i \\
X_{p_i} = \dfrac{\partial}{\partial q^i} & \{p_i, t\} = 0 \\
X_t = \epsilon\left(t\dfrac{\partial}{\partial t} + p_i \dfrac{\partial}{\partial p_i}\right) &
\end{array}$$

DÉMONSTRATION :. il s'agit de petits calculs élémentaires. ∎

Soit G un groupe de Lie, et donnons nous une action ϕ de G comme groupe d'automorphismes [forts] de (θ, ω). On a donc pour tout $a \in G$.

$$\phi_a^* \theta = \theta \qquad \text{et} \qquad \phi_a^* \omega = \omega$$

L'action infinitésimale correspondante $\underline{\underline{g}} \to \mathcal{H}(V)$ associe, à tout $A \in \underline{\underline{g}}$ le champ fondamental $\tilde{A}$ où:

$$\mathcal{L}_{\tilde{A}} \theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_{\tilde{A}} \omega = 0$$

On dira en suivant J.M. Souriau [15] qu'une application $J : V \to \underline{\underline{g}}^*$ est un *moment* pour ϕ si

$$(10) \qquad \begin{cases} \text{(i)} & \forall A \in \underline{\underline{g}} \quad \tilde{A} = X_{J_A} \\ \text{(ii)} & RJ = 0 \end{cases}$$

où on a noté pour $A \in \underline{\underline{g}}$, $J_A : V \to \mathbf{R}$ l'application définie par $J_A(x) = J(x).A$. Nous allons voir comment la donnée d'un moment peut permettre d'obtenir pour (V, θ, ω) un théorème de réduction analogue au théorème de réduction de Marsden-Weinstein pour les variétés symplectiques (voir par exemple [12] ou [10] pour ce dernier cas).

4. THÉORÈMES DE RÉDUCTION: LE CAS COSYMPLECTIQUE

On suppose dans tout ce paragraphe que $\epsilon = 0$.

Donnons nous une action ϕ de G sur V comme groupe d'automorphismes. On peut tout de suite remarquer qu'une telle action n'admet pas toujours un moment [par exemple si le champ de Reeb R est complet (notamment si V est compacte) il définit une action de $\mathbf{R}$, et cette action est sans moment puisque R n'est pas un hamiltonien].

Supposons donc que ϕ admette un moment $J : V \to \underline{\underline{g}}^*$. Les relations (10) s'ecrivent

$$(\forall A \in \underline{\underline{g}}) \qquad \begin{cases} i_{\tilde{A}}\theta = 0 \\ i_{\tilde{A}}\omega = \mathrm{d}\, J_A \\ RJ_A = 0 \end{cases}$$

La situation est alors très voisine de la situation symplectique:

PROPOSITION 6. *Soit ϕ une action du groupe de Lie G comme groupe d'automorphismes de la variété cosymplectique (V, θ, ω) connexe, et soit $J : V \to \underline{\underline{g}}^*$ un moment pour cette action. Soit $x \in V$. Alors l'application $\sigma : G \to \underline{\underline{g}}^*$ définie par*

$$(\forall a \in G) \quad \sigma_a = J(\phi_a(x)) - \mathrm{ad}_a^* J(x)$$

ne dépend pas du choix de $x \in V$, mais seulement de J. σ est un cocycle pour la cohomologie de G à valeurs dans $\underline{\underline{g}}^*$ considéré comme G-module pour la représentation coadjointe, et la classe de cohomologie $[\sigma]$ ainsi définie ne dépend pas du moment J, mais seulement de ϕ. De plus l'application $G \times \underline{\underline{g}}^* \to \underline{\underline{g}}^*$ qui à (a, μ) associe $\psi_a(\mu) = \mathrm{ad}_a^*\mu + \sigma_a$ définit une représentation affine ψ de G dans $\underline{\underline{g}}^*$, et le moment J est équivariant pour les actions ϕ et ψ.

DÉMONSTRATION. Posons $\sigma_a(x) = J(\varphi_a(x)) - \mathrm{ad}_a^* J(x)$. On définit ainsi $\sigma_a \in A^0(V)$, et si $X \in TV$

$$\mathrm{d}\,\sigma_a(X) = \mathrm{d}\,J(\varphi_{a*}X) - \mathrm{ad}_a^*\mathrm{d}\,J(X)$$

en appliquant les deux membres à $A \in \underline{\underline{g}}$, on obtient

$$\mathrm{d}\,\sigma_a(X).A = 0$$

puisque $\varphi_{a^{-1}*}\tilde{A} = \widetilde{\mathrm{ad}_{a^{-1}*}A}$. Donc $\mathrm{d}\,\sigma_a = 0$, et puisque V est supposée connexe, σ_a est constante. Si on choisit $x \in V$ une fois pour toutes, on a si $a, b \in G$

$$\sigma_{ab} = J(\varphi_{ab}(x)) - \mathrm{ad}_a^*\mathrm{ad}_b^* J(x) \quad \text{et} \quad \sigma_b = J(\varphi_b(x)) - \mathrm{ad}_b^* J(x)$$

En remplaçant x par $\varphi_b(x)$ on aurait

$$\sigma_a = J(\varphi_{ab}(x)) - \mathrm{ad}_a^* J(\varphi_b(x))$$

Donc en comparant ces expression, on obtient

$$\sigma_{ab} = \sigma_a + \mathrm{ad}_a^*\sigma_b$$

qui montre que σ est un cocycle pour $H^1(G, \underline{\underline{g}}^*)$.

Si maintenant J' est un autre moment pour φ, on aura pour tout $A \in \underline{\underline{g}}$

$$\mathrm{d}\,J'_A = i_{\tilde{A}}\omega = \mathrm{d}\,J_A$$

ce qui permet de définir $\mu_A \in \mathbf{R}$ par $\mu_A = J'_A - J_A$. On obtient ainsi $\mu \in \underline{\underline{g}}^*$; il est facile de vérifier que si σ' est la cocycle défini par J', on a pour tout $a \in G$

$$\sigma'_a - \sigma_a = \mu - \mathrm{ad}_a^*\mu$$

et donc $[\sigma'] = [\sigma]$.

Enfin la relation $\xi_a(\mu) = \mathrm{ad}_a^*\mu + \sigma_a$ définit bien une représentation affine de G sur $\underline{\underline{g}}^*$, et par construction si $x \in V$

$$\xi_a(J(x)) = J(\varphi_a(x))$$

de sorte que J est équivariant pour les actions φ et ξ. ∎

Si $\mu \in \underline{\underline{g}}^*$, la préimage $J^{-1}(\mu)$ est un fermé de V, et si μ est une valeur régulière de $J, J^{-1}(\mu)$ est une sous-variété fermée de V. Comme $RJ = 0$, $J^{-1}(\mu)$ est une réunion d'orbites de R, de sorte que R est adapté à $J^{-1}(\mu)$. Comme pour tout $A \in \underline{\underline{g}}$ et tout $X \in TV$

$$\mathrm{d}\, J_A(X) = \omega(\tilde{A}, X)$$

on a, pour tout $x \in J^{-1}(\mu)$

(11) $$T_x J^{-1}(\mu) = \left\{ X_x \in T_x V \mid (\forall A \in \underline{\underline{g}})\ \omega(X_x, \tilde{A}_x) = 0 \right\}$$

Désignons par H_μ le groupe d'isotropie en μ de l'action ψ de G. L'équivariance de J montre que $J^{-1}(\mu)$ est stable pour l'action de H_μ induite par l'action de G sur V et l'algèbre de Lie $\underline{\underline{h}}_\mu$ de H_μ est, si $x \in J^{-1}(\mu)$

$$\underline{\underline{h}}_\mu = \left\{ B \in \underline{\underline{g}} \mid \ d f J(\tilde{B}_x) = 0 \right\} = \left\{ B \in \underline{\underline{g}} \mid (\forall A \in \underline{\underline{g}}) \omega(\tilde{A}_x, \tilde{B}_x) = 0 \right\}$$

c'est-à-dire, en posant

(12) $$\begin{aligned} &\tilde{\underline{\underline{g}}}_x = \left\{ \tilde{A}_x \mid A \in \underline{\underline{g}} \right\} \quad \tilde{\underline{\underline{h}}}_{\mu \cdot x} = \left\{ \tilde{B}_x \mid B \in \underline{\underline{h}}_\mu \right\} \\ &\tilde{\underline{\underline{h}}}_{\mu \cdot x} = \tilde{\underline{\underline{g}}}_x \cap T_x J^{-1}(\mu) \end{aligned}$$

Rappelons que si $J : V \to W$ est une application différentiable, un point $\mu \in W$ est appelé une *valeur faiblement régulière* de J si la préimage $J^{-1}(\mu)$ est une sous-variété fermée dont l'espace tangent en tout point x coincide avec le noyau de l'application linéaire tangente J_{*x}. Par exemple, si μ est une valeur régulière de J (c'est-à-dire si J est de rang maximum en tout point de $J^{-1}(\mu'))$, c'est à fortiori une valeur faiblement régulière.

D'autre part, nous dirons qu'une action ϕ d'un groupe de Lie G sur une variété V est *quotientante* si l'espace des orbites V/G a une structure de variété telle que la projection canonique $V \to V/G$ soit une submersion. Par exemple, toute action propre et libre est quotientante. De façon plus générale, si une action ϕ de G se factorise suivant une action propre et libre d'un quotient $\tilde{G}$ de G, ϕ est quotientante. On a alors le

THÉORÈME DE RÉDUCTION COSYMPLECTIQUE. *Soit ϕ une action d'un groupe de Lie G comme groupe d'automorphismes d'une variété cosymplectique connexe (V, θ, ω). Soit $J : V \to \underline{\underline{g}}^*$ un moment pour cette action, et ψ une représentation de G dans $\underline{\underline{g}}^*$ rendant J équivariant. Soient $\mu \in \underline{\underline{g}}^*$ une valeur faiblement régulière de J et H_μ le groupe d'isotropie en μ de l'action ψ de G.*

Alors, si l'action de H_μ sur $J^{-1}(\mu)$ induite par ϕ est quotientante, les restrictions à $J^{-1}(\mu)$ des formes θ et ω sont basiques pour la fibration $J^{-1}(\mu) \to V^\mu = J^{-1}(\mu)/H_\mu$, et leurs projections définissent une structure cosymplectique (θ^μ, ω^μ) sur la variété quotient V^μ.

DÉMONSTRATION. L'action de H_μ sur $J^{-1}(\mu)$ étant supposée quotientable, l'espace des orbites $V^\mu = J^{-1}(\mu)/H_\mu$ est une variété, et la projection $\pi : J^{-1}(\mu) \to V^\mu$ est une submersion. Les champs fondamentaux pour cette action sont les $\tilde{B}$ où $B \in \underline{\underline{h}}_\mu$, ce qui montre que θ et ω sont basiques. Il existe donc sur V^μ des formes θ^μ et ω^μ, uniques telles que $\theta|_{J^{-1}(\mu)} = \pi^*\theta^\mu$ et $\omega|_{J^{-1}(\mu)} = \pi^*\omega^\mu$. Montrons que $(V^\mu, \theta^\mu, \omega^\mu)$ est cosymplectique: θ^μ et ω^μ sont fermées puisque θ et ω le sont. D'autre part R est adapté à $J^{-1}(\mu)$ et invariant par H_μ, donc projectable en R^μ sur V^μ. On a alors d'une part

$$i_{R^\mu}\theta^\mu = 1 \qquad \text{et} \qquad i_{R^\mu}\omega^\mu = 0$$

et d'autre part, l'application $\flat : TV^\mu \to T^*V^\mu \quad X^\mu \mapsto (X^\mu)^\flat = i_{X^\mu}\theta^\mu.\theta^\mu + i_{X^\mu}\omega^\mu$ bijective, car si $X^\mu \in TV^\mu$ est tel que $(X^\mu)^\flat = 0$, on a, en désignant par x un point de $J^{-1}(\mu)$ dans la fibre de ξ et par $X \in T_xJ^{-1}(\mu)$ un vecteur se projetant suivant X_ξ^H :

$$\theta X = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\forall Y \in T_xJ^{-1}(\mu)\right) \qquad \omega(X, Y) = 0$$

Comme $R_x \in T_xJ^{-1}(\mu)$, la décomposition $T_xV = \mathbf{R}(R_x) \oplus \ker\theta_x$ induit une décomposition $T_xJ^{-1}(\mu) = \mathbf{R}(R_x) \oplus E_x$ et la relation (11) montre que E_x est l'orthogonal par rapport à la restriction à $\ker\theta_x$ de la 2-forme ω_x, du sous-espace $\underline{\underline{\tilde{g}}}$ est l'orthogonal de E_x. Donc, en utilisant (12) les relations ci-dessus entraînent

$$X \in \underline{\underline{\tilde{g}}}_{\mu \cdot x}$$

et donc $X^\mu = 0$. Le résultat provient alors de la proposition 2. ∎

Le résultat suivant est un autre théorème de réduction dans lequel la variété réduite n'est plus una variété cosymplectique, mais une variété symplectique. Le champ de Reeb devient alors un champ de vecteur hamiltonien [au sens symplectique].

THÉORÈME DE RÉDUCTION SYMPLECTIQUE. *Soit sur une variété cosymplectique (V, θ, ω) une action quotientante de $\mathbf{R}$ dont le générateur infinitésimal T vérifie les conditions suivantes:*

$$i_T\theta = 1 \quad \text{et} \quad i_T\omega = -\mathrm{d}\,H \qquad \textit{où} \qquad H \in A^*(V)$$

Alors la fonction H est projetable en une fonction H^w définie sur la variété quotient $W = V/\mathbf{R}$, et il existe sur W une forme symplectique ω^w telle que le champ de Reeb R se projette sur W suivant le champ hamiltonien (au sens symplectique) X_{H^w} de H^w par rapport à la forme ω^w.

DÉMONSTRATION. On a $\mathcal{L}_T\theta = 0$ et $\mathcal{L}_T\omega = 0$, de sorte que $\mathbf{R}$ agit comme groupe d'automorphismes. Donc le champ de Reeb R est projetable sur W. D'autre part, on a $R - T = X_H$, donc R et X_H ont la même projection sur W. Introduisons la forme $\omega_0 = \omega - \mathrm{d}\,H \wedge \theta$. Elle est fermée, et basique pour la fibration $V \xrightarrow{\pi} W$. Donc il existe une unique 2-forme ω^w sur W telle que $\pi^*\omega^w = \omega_0$. ω^w est fermée, et elle est de rang maximum; en effet l'application

$$TW \to T^*W \qquad X^w \to i_{X^w}\omega^w$$

est un isomorphisme: si $i_{X^w}\omega^w = 0$, soit X un vecteur tangent à V se projetant suivant X^w. On aura alors

$$i_X\omega - i_X\mathrm{d}\,H.\theta + i_X\theta.\mathrm{d}\,H = 0$$

Ceci entraîne $i_X\mathrm{d}\,H = 0$ puisque $RH = 0$, de sorte que $X^\flat = \theta X.T^\flat$. Donc X et T sont colinéaires et $X^W = 0$.

Il reste à montrer que la projection de R, c'est-à-dire celle de X_H, coincide avec $X^w_{H^w}$, c'est-à-dire que $i_{\pi_* X_H}\omega^w = \mathrm{d}\,H^w$, ce qui résulte du fait que si Y^w est un vecteur tangent à W et Y un vecteur tangent à V se projectant suivant Y^w

$$\begin{aligned}\left(i_{\pi_* X_H}\omega^w\right) Y^w &= \omega_0(X_H, Y) = \left(i_{X_H}\omega\right) Y \\ &= (\mathrm{d}\,H)Y = (\mathrm{d}\,H^w)Y^w.\end{aligned}$$

■

COROLLAIRE. *Soit sur la variété cosymplectique* (V, θ, ω) *une intégrale première* H *du flot dynamique. Alors, si le champ de vecteur* $T = R - X_H$ *est le générateur infinitésimal d'une action quotientante de* $\mathbf{R}$, H *est projetable sur la variété quotient* $W = V/\mathbf{R}$ *et il existe sur* W *une forme symplectique* ω^w *telle que le champ de Reeb* R *de* V *se projette suivant le champ hamiltonien* X^w_H *associé à la projection de* H. ■

REMARQUE. Les théorèmes de réduction ci-dessus rentrent dans la cadre plus général de la réduction des structures de Poisson, étudiée par Marsden-Ratiu [11]: Dans le langage de ces auteurs, les hypothèses impliquent que le triple $(V, J^{-1}(\mu), E_\mu)$, où E_μ est le fibré le long de $J^{-1}(\mu)$ des vecteurs tangents aux orbites de G, est Poisson-réductible. L'information supplémentaire apportée ici réside dans la nature cosymplectique ou symplectique de la variété réduite.

5. THÉORÈMES DE RÉDUCTION: LE CAS CONTACT

On suppose dans ce paragraphe que $\epsilon \neq 0$. [On pourrait d'ailleurs se limiter, en remplaçant au besoin la structure par une structure conjuguée, à $\epsilon = 1$].

Si ϕ est une action de G sur V comme groupe d'automorphismes, et pour tout $A \in \underline{\underline{g}}$, $\tilde{A}$ est le champ fondamental associé, posons

$$J_A = \frac{1}{\epsilon} i_{\tilde{A}} \theta \tag{13}$$

On a alors d'après (3)

$$\tilde{A} = X_{J_A}$$

et d'ailleurs en conséquence

$$RJ_A = 0 .$$

Donc J est un moment [et c'est le seul] pour ϕ. Ainsi, *toute action de G comme groupe d'automorphisme admet un unique moment J, et ce moment est équivariant pour la représentation coadjointe de G sur $\underline{\underline{g}}^*$* : ce dernier point résulte du fait que pour tout $a \in G$, tout $A \in \underline{\underline{g}}$ et tout $x \in V$

$$J_A(\phi_A(x)) = \frac{1}{\epsilon}\theta_{\phi_{a(x)}} \tilde{A}_{\phi_{a(x)}} = \frac{1}{\epsilon}\theta_x \left(a\widetilde{d_{a^{-1}*}A}\right)_x = J_{\mathrm{ad}_{a^{-1}*}A}(x)$$

Comme $\mathrm{d}\, J_A = i_{\tilde{A}}\omega$, on voit que les points critiques de J_A sont les points x où les vecteurs $\tilde{A}_x$ et R_x sont colinéaires. On notera aussi que, puisque J_A est une intégrale première de R, on a

$$(\forall A \in \underline{\underline{g}}) \qquad i_{\mathrm{grad}\, J_A}\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad i_{\mathrm{grad}\, J_A}\omega = \mathrm{d}\, J_A \tag{14}$$

Soit alors μ une valeur faiblement régulière de J. $J^{-1}(\mu)$ est une sous-variété fermée de V invariante par l'action du sous-groupe H_μ (d'isotropie de μ pour la représentation coadjointe de G) induite par ϕ. Comme dans le cas cosymplectique, les champs de vecteurs $\tilde{A}(A \in \underline{\underline{h}}_\mu)$ et R sont adaptés à cette sous-variété, mais on a cette fois

$$\left(\forall A \in \underline{\underline{h}}_\mu\right) \quad i_{\tilde{A}}\theta = \epsilon\mu A \quad \text{et} \quad i_{\tilde{A}}\omega|_{J^{-1}(\mu)} = 0 \tag{15}$$

Autrement dit, la restriction de θ à $J^{-1}(\mu)$ est bien invariante par H_μ, mais n'est plus basique (sauf si $\mu = 0$). Pour tourner cette difficulté, on peut remarquer que d'après (14) il n'en est pas de même pour l'action infinitésimale de $\underline{\underline{h}}_\mu$ défini sur $J^{-1}(\mu)$ par $A \mapsto \mathrm{grad}\, J_A$: ceci est cohérent car d'après (2) et (3)

$$\mathrm{grad}\, J_A = \tilde{A} - \epsilon\mu A.R \tag{16}$$

de sorte que le champ de vecteur grad J_A est adapté à $J^{-1}(\mu)$; d'autre part si $A, B \in \underline{\underline{h}}_\mu$ on a sur $J^{-1}(\mu)$:

$$[\operatorname{grad} J_A, \operatorname{grad} J_B] = [\tilde{A}, \tilde{B}]$$

puisque $\tilde{A}$ et R commutent, et comme par définition même de $\underline{\underline{h}}_\mu$

$$\mu[A, B] = 0$$

dès que $A \in \underline{\underline{h}}_\mu$, on en déduit , toujours en restriction à $J^{-1}(\mu)$

$$[\operatorname{grad} J_A, \operatorname{grad} J_B] = \operatorname{grad} J_{[A,B]} \tag{17}$$

On a donc bien une action infinitésimale de $\underline{\underline{h}}_\mu$ sur $J^{-1}(\mu)$. En général, cette action infinitésimale ne provient pas d'une action de H_μ sur $J^{-1}(\mu)$, mais, au moins si R est complet, elle provient d'une action du groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\underline{\underline{h}}_\mu$, c'est-à-dire du revêtement universel $\hat{H}_\mu$ de la composante neutre de H_μ. Si $(\rho_t)_{t \in \mathbf{R}}$ désigne le groupe à 1 paramètre de difféomorphismes défini par R, on posera en effet pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $A \in \underline{\underline{g}}$, $x \in J^{-1}(\mu)$

$$\hat{\phi}_{\exp tA}(x) = \phi_{\exp tA}\left(\rho^{-1}_{\epsilon t \mu A}(x)\right) \tag{18}$$

Comme $\tilde{A}$ et R commutent, il en est de même de ϕ et ρ, de sorte que l'on définit bien ainsi un groupe à 1 paramètre de difféomorphismes de $J^{-1}(\mu)$, donc finalement une action $\hat{\phi} : \tilde{H}_\mu \times J^{-1}(\mu) \to J^{-1}(\mu)$. On obtient alors le

THÉORÈME DE RÉDUCTION DE CONTACT. *Soit ϕ une action d'un groupe de Lie G comme groupe d'automorphismes forts de la variété de contact (V, θ, ω). Soient μ une valeur faiblement régulière de l'application moment $J : V \to \underline{\underline{g}}^*$ définie par*

$$(\forall A \in \underline{\underline{g}}) \qquad J_A = \frac{1}{\epsilon}\theta\tilde{A},$$

H_μ le groupe d'isotropie en μ pour la représentation coadjointe de G. On suppose que le champ de Reeb R est complet, et on définit l'action $\hat{\phi}$ du revêtement universel $\hat{H}_\mu$ de la composante neutre de H_μ par

$$(\forall A \in \underline{\underline{h}}_\mu) \qquad \hat{\phi}_{\exp A} = \phi_{\exp A} \circ \rho^{-1}_{\epsilon \mu A}$$

$(\rho_t)_{t \in \mathbf{R}}$ étant le flot global de R. Alors, si cette action $\hat{\phi}$ est quotientante la restriction de θ à $J^{-1}(\mu)$ est basique pour la fibration $J^{-1}(\mu) \to V^\mu = J^{-1}(\mu)/\hat{H}_\mu$ et la projection θ^μ est une forme de contact sur V^μ.

DÉMONSTRATION. Il reste seulement à montrer que la projection θ^μ de θ est une forme de contact sur V^μ. Or θ et ω sont basiques pour $\hat{\phi}$, et R est invariant par $\hat{\phi}$. On obtient donc sur V^μ les formes θ^μ et ω^μ, et le champ de vecteurs R^μ tel que

$$i_{R^\mu}\theta^\mu = 1, \qquad i_{R^\mu}\omega^\mu = 0, \qquad d\theta^\mu = -\epsilon\omega^\mu$$

Il suffit donc, pour achever, de montrer que (θ^μ, ω^μ) est une structure de presque contact sur V^μ. Or si un vecteur X^μ en un point de V^μ vérifie

$$i_{X^\mu}\theta^\mu.\theta^\mu + i_{X^\mu}\omega^\mu = 0$$

on aura $i_{X^\mu}\theta^\mu = 0$ et $i_{X^\mu}\omega^\mu = 0$, ce qui montre que X^μ est le projeté d'un $X \in T_x J^{-1}(\mu)$ tel que $\theta_x X = 0$ et $i_X \omega_x|_{J^{-1}(\mu)} = 0$. Ceci montre que si on note $T_x J^{-1}(\mu) = \mathbf{R}(R_x) \oplus E_x$ la décomposition induite par $T_x V = \mathbf{R}(R_x) \oplus \ker \theta_x, X \in E_x \cap \mathrm{orth}_{\omega_x}(E_x)$, l'orthogonalité étant prise dans l'espace vectoriel $\ker \theta_x$ sur lequel ω_x est non dégénérée. Or il résulte des relations (2) et (11) que

$$\mathrm{orth}_{\omega_x}(E_x^{\cdot}) = \{\mathrm{grad}_x A | A \in \underline{\underline{g}}\}$$

et par suite

$$E_x \cap \mathrm{orth}_{\omega_x}(E_x) = \{\mathrm{grad}_x A | A \in \underline{\underline{h}}_\mu\}$$

Donc $X^\mu = 0$. ∎

COROLLAIRE. *Soit f une intégrale première de R. Si μ est une valeur régulière de f et si le champ de vecteurs* grad f *définit une action quotientante de $\mathbf{R}$ sur $f^{-1}(\mu)$, la restriction de θ à $f^{-1}(\mu)$ se projette suivant une forme de contact θ^μ sur le quotient* $f^{-1}(\mu)\mathbf{R}$ ∎

6. EXEMPLES

1. Un *systéme mécanique* est la donnée d'une variété symplectique (W, ω_W) et d'une fonction différentiable $H : W \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ appelée le *hamiltonien du système*. On lui associe la variété cosymplectique $V = W \times \mathbf{R}$ où

$$\begin{cases} \theta = dt \\ \omega = \omega_W + dH \wedge dt \end{cases}$$

(où on a noté abusivament dt pour $pr_2^* dt$ et ω_W pour $pr_1^* \omega_w$).

Les trajectoires du système mécanique sont alors les projections sur W des courbes intégrales du champ de Reeb R de (V,θ,ω).

a) Le *solide libre* est le système mécanique $(T^*\mathrm{D}_3,\omega_0,H)$ où D_3 est le groupe des déplacements directs de l'espace euclidien (c'est-à-dire le produit semi direct $(\mathbf{R}^3 \times SO_3)$, ω_0 la forme symplectique standard sur le cotangent $T^*\mathrm{D}_3$, et H une fonction différentiable sur $T^*\mathrm{D}_3$ (on a donc ici un hamiltonien indépendant du temps), invariante par l'action naturelle de D_3 sur son cotangent, et dont la restriction à charque fibre de $T^*\mathrm{D}_3$ est une fonction quadratique.

La variété cosymplectique associée est donc $V = T^*\mathrm{D}_3 \times \mathbf{R}$ munie des formes $\theta = \mathrm{d}t$ et $\omega = \omega_0 + \mathrm{d}H \wedge \mathrm{d}t$. Notons de façon abrégée les points de V sous la forme $(a,q,p,r,t) \in SO_3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3*} \times \mathbf{R}$ où les éléments $q \in \mathbf{R}^3$ sont des matrices colonne, et les éléments $p,r \in \mathbf{R}^{3*}$ sont des matrices lignes. Si on choisit, pour décomposer D_3 en $SO_3 \times \mathbf{R}^3$, de coordonnées centrées au centre d'inertie du solide, on a, pour une base convenable de $\underline{\underline{so}}_3$, l'expression du hamiltonien

$$H(p,r) = \sum_{1\leq i\leq 3}\left(\frac{1}{2m}p_i^2 + \frac{1}{2M_i}r_i^2\right)$$

où m est la masse du solide, et M_1, M_2, M_3 les coefficients de l'ellipsoide d'inertie du solide.

Le groupe de Galiée $G_3 = SO_3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ est le sous-groupe du groupe affine $GA(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R})$ définie par

$$(\rho,v,\nu,\tau)(x,t) = (\rho x + v + \nu t, \tau + t)$$

où

$$(\rho,v,\nu,\tau) \in SO_3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \qquad \text{et} \qquad (x,t) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$$

L'action naturelle de G_3 sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ induit sur $\mathrm{D}_3 \times \mathbf{R}$ l'action

$$(\rho,v,\nu,\tau)(a,q,t) = (\rho a, \rho q + v + \nu t, \tau + t)$$

En passant aux courbes paramétrées par le temps, on en déduit l'action de G_3 sur $T\mathrm{D}_3 \times \mathbf{R}$

$$(\rho,v,\nu,\tau)(\dot{a},\dot{q},1) = (\rho\dot{a}, \rho\dot{q} + \nu, 1)$$

qui, se transporte en une action sur $T^*\mathrm{D}_3 \times \mathbf{R}$ au moyen de l'isomorphisme $T\mathrm{D}_3 \to T^*\mathrm{D}_3$ défini par la transformation de Legendre [ou encore par la forme quadratique associée à l'énergie cinétique]:

$$(\rho,v,\nu,\tau)(a,q,p,r,t) = (\rho a, \rho q + v + t\nu, p^t\rho + m\nu, r, \tau + t)$$

Il en résulte que G_3 *agit comme groupe d'automorphismes* forts sur (V, θ, ω).

Il est facile de voir que cette action n'a pas de moment. Par contre l'action induite par $G_3' = [G_3, G_3]$ (sous-groupe de G_3 défini par $\tau = 0$) admet le moment $J : V \to g_3^* = \underline{\underline{so}}_3^* \mathbb{R}^{3*} \times \mathbb{R}^{3*}$ défini par

$$\begin{cases} J_L = L \circ \mathrm{ad}^*_{(a,q)} & \text{si } L \in \underline{\underline{so}}_3 \\ J_{\frac{\partial}{\partial x_i}} = p_i & 1 \leq i \leq 3 \\ J_{\frac{\partial}{\partial v_i}} = tp_i - mq^i & 1 \leq i \leq 3 \end{cases}$$

Le cocycle associé est l'application $\sigma : G_3' \to \underline{\underline{g}}_3'$ définie par

$$\sigma(\rho, v, \nu) = (0, m\nu, -mv)$$

et donc J est équivariant pour la représentation affine ψ de G_3' dans $\underline{\underline{g}}_3'^*$ donnée par

$$\psi_{(\rho,v,\nu)}(\alpha, \xi, \eta) = \left(\mathrm{ad}^*_\rho \alpha, \xi^t \rho + m\nu, \eta^t \rho - mv\right)$$

Pour appliquer le théorème de réduction, il est intéressant de procéder en deux temps: on fait d'abord agir le sous-groupe $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ de G_3' défini par $\rho = 1$: on a, si $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

$$\psi_{(v,\nu)}(\xi, \eta) = (\xi + m\nu, \eta - mv)$$

de sorte que $J^{-1}(\xi, \eta) = \{(a, q, p, r, t) | p = \xi \text{ que } tp - mq = \eta\}$.

Le difféomorphisme φ de V défini par

$$\varphi(a, q, p, r, t) = (a, q', p', r, t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q' = q - t\frac{\xi}{m} + \frac{\eta}{m} \\ p' = p \;\; {}^t\xi \end{cases}$$

est un automorphisme fort de (V, θ, ω), et

$$J^{-1}(\xi, \eta) = \{(a, q', p', r, t) | p' = 0 \quad \text{et} \quad q' = 0\}.$$

de sorte qu'on a une première réduction

$$V_{(\xi,\eta)} = T^* SO_3 \times \mathbb{R}$$

On a ainsi «fixé» le centre d'inertie du solide.

On fait ensuite agir le sous-groupe SO_3 de G_3' : on est ici (au facteur multiplicatif $\mathbb{R}$ près) dans la situation classique du solide à point fixe (son centre d'inertie), l'action de

SO_3 étant l'action à gauche sur le facteur T^*SO_3, et l'action triviale sur le facteur $\mathbf{R}$. La réduction est alors classique ([1], [6]): si $\alpha \neq 0$, la variété réduite V_α est la produit $S^2 \times \mathbf{R}$, est la forme symplectique standard sur $\mathbf{S}^2$, et la fonction h ha projetét sur $\mathbf{S}^2$ de la fonction définie sur T^*SO_3 par

$$(a, q, p, r) \to \sum_{1 \leq i \leq 3} \frac{r_i^2}{2M_i}.$$

Si l'on considère maintenant l'action du sous-groupe $\mathbf{R}$ de G_3 sur $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$, on obtient une action triviale sur $\mathbf{S}^2$, et l'action naturelle du groupe addifit $\mathbf{R}$ sur lui-même sur le second facteur. Le théorème de réduction symplectique s'applique alors trivialement. La variété symplectique quotient est $(\mathbf{S}^2, \omega_{\mathbf{S}^2})$ munie du hamiltonien quadratique h.

b) L'étude du *problème restreint des trois corps* conduit ([1]) au système mécanique $(T^*\mathbb{C}, \omega, H)$ où ω est la forme symplectique standard sur le cotangent $T^*\mathbb{C} = \mathbb{C}^2$, et H le hamiltonien dépendant du temps défini de la façon suivante: soit $\mu \in]0,1[$ un réel fixé une fois pour toutes, $S_t = -\mu e^{it}$, $J_t = (1-\mu)e^{it}$. Alors

$$H(q,p,t) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{\mu}{|q - S_t|} - \frac{1-\mu}{|q - J_t|}$$

La variété cosymplectique associée est $V = \mathbb{C}^2 \times \mathbf{R}$ avec $\theta = \mathrm{d}t$, et $\omega = \mathrm{Re}(\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}\bar{p}) + \mathrm{d}H \wedge \mathrm{d}t$.

Considérons alors sur V l'«action du temps», c'est-à-dire l'action de $\mathbf{R}$ définie par

$$\tau.(q,p,t) = (qe^{i\tau}, pe^{i\tau}, t + \tau)$$

Cette action est libre et propre, et les hypothèses du théorème de réduction symplectique sont satisfaites. La variété quotient $V/\mathbf{R}$ s'identitie naturellement à la sous-variété $T^*\mathbb{C} \times \{0\}$ de V, de sorte que le système mécanique quotient est $(T^*\mathbb{C}, \omega_0, \bar{H})$, où

$$\bar{H}(q,p,t) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{\mu}{|q - S_0|} - \frac{1-\mu}{|q - J_0|} + Im(q\bar{p}).$$

C'est la «transformation» classique, qui permet de se ramener à un hamiltonien indépendant du temps. ([1]).

II. Munissons $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire usuel, ce qui permettra d'identifier $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^{n*}$, et considérons sur le tore $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbb{Z}^n$ la métrique induite. On notera $\tilde{x}$ la projection sur $\mathbf{T}^n$ de $x \in \mathbf{R}^n$.

Sur le fibré unitaire cotangent $S^*\mathbf{T}^n$, la restriction de la forme de Liouville est une forme de contact θ. Si l'on note $(q^1, \ldots, q^n)$ les «coordonnées angulaires» sur $\mathbf{T}^n$, $(p_1, \ldots, p_n)$ les coordonnées sur $\mathbf{R}^{n*}$, on a

$$S^*\mathbf{T}^n = \{(q,p) \in \mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^{n*} \mid \|p\| = 1\} =$$
$$= \left\{(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n) \mid \sum (p_i)^2 = 1\right\}.$$

Alors, $\theta = \sum_{1\le i\le n} p_i \mathrm{d}q^i$, et le champ de Reeb R est donné par $R = \sum_{1\le i\le n} p_i \frac{\partial}{\partial q^i}$. Le flot (ρ_t) de R est

$$\rho_t(q,p) = (q + \overline{tp}, p).$$

L'action de $\mathbf{T}^n$ sur lui-même se relève en un action sur $T^*\mathbf{T}^n$ qui laisse invariant $S^*\mathbf{T}^n$, d'où une action comme groupe d'automorphismes forts donnée par

$$\phi_\tau(q,p) = (q + \tau, p) \qquad (\tau \in \mathbf{T}^n)$$

et de moment $J : S^*\mathbf{T}^n \to \mathbf{R}^{n*}$ où

$$J(q,p) = p.$$

Un point $\mu \in \mathbf{R}^{n*}$ est donc une valeur (faiblement) régulière si, et seulement si, $\|\mu\| = 1$. Si μ vérifie cette condition, l'action de $\mathbf{R}^n$ sur $J^{-1}(\mu)$ introduite au paragraphe 5 est donnée, pour $\tau \in \mathbf{R}^n$ par

$$\hat{\phi}_\tau(q,\mu) = \phi_{\bar\tau}(\rho_{-\langle\tau,\mu\rangle}(q,\mu)) = (q - \overline{\langle\tau,\mu\rangle\mu} + \bar\tau, \mu).$$

Cette action est la projection sur $\mathbf{T}^n$ de l'action de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times \{\mu\}$ définie par

$$\tilde{\phi}_\tau(x,\mu) = (x - \langle\tau,\mu\rangle\mu + \tau\ ,\ \mu)$$

dont la variété des orbites est $\mathbf{R}$, muni de la projection

$$\mathbf{R}^n \times \{\mu\} \to \mathbf{R} \qquad (x,\mu) \mapsto \langle x,\mu\rangle.$$

L'action $\hat{\phi}$ est donc quotientante si, et seulement si, l'application ci-dessus se factorise en une application

$$\mathbf{T}^n \times \{\mu\} \to \mathbf{S}^1$$

c'est-à-dire si le système des composantes $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ de μ est de rang 1 sur $\mathbf{Q}$. Géométriquement, cela signifie que l'orbite de (q,μ) par le champ de Reeb est fermée. La variété réduite est alors $\mathbf{S}^1$, munie de sa forme canonique.

L'auteur remercie le referee pour ses intéressantes suggestions.

REFERENCES

[1] R. ABRAHAM, J. MARSDEN: *Foundations of Mechanics* Benjamin. New York (1978).
[2] C. ALBERT: *Some properties of $\underline{\underline{k}}$-flat manifolds.* J. of Diff. Geom. Vol XI (1976).
[3] C. ALBERT, P. MOLINO: *Pseudogroupes de Lie transitifs. I Structures principales.* Travaux en Cours. Hermann, Paris (1984).
[4] V. ARNOLD: *Les méthodes mathématiques de la Méchanique Classique.* Editions Mir. (1976).
[5] P. LIBERMANN: *Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact.* Colloque de Géométrie Différentielle Globale. Bruxelles 1958. Gauthier Villars. Paris (1959).
[6] P. LIBERMANN and C. MARLE: *Géométrie symplectique. Bases théoriques de la Mécanique* Pub. Math. Univ. Paris VII (1986).
[7] A. LICHENEROWICZ: *Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées* J. Math. Pures et app. vol. 57 (1978).
[8] A. LICHENEROWICZ: *Variétés canoniques et transformations canoniques* C.R.A.S. Paris t 280 (1975).
[9] A. LICHENEROWICZ: *Geometry of the canonical transformations* in «Dynamical Systems and Microphys control theory and Mechanics» Academic Press (1984).
[10] C.M. MARLE: *Contact manifolds, canonical manifolds, and the Hamilton-Jacobi method in Analytical mechanics.* Proc. of the IUTAM-ISIMM. Symposium on modern developments in Analytical Mechanics. Turin (1982).
[11] J. MARSDEN and T. RATIU: *Reduction of Poisson manifolds* Lett. in Math. Phys. 11 (1986).
[12] J. MARSDEN and WEINSTEIN: *Reduction of symplectic manifolds with symmetry* Rep. Math. Physc. vol 5 (1974).
[13] G. MONNA: *Intégrabilité des structures de presque-contact.* C.R.A.S. Paris t 291 (1980).
[14] G. REEB: *Sur certaines propriété topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques* Mem. Acad. Sc. Bruxelles. 27 (1952).
[15] J.M. SOURIAU: *Structures des systèmes dynamiques* Dunod Paris (1969).
[16] A. WEINSTEIN: *The local structure of Poisson manifolds* J. of Diff. Geom. **18** (1983).

Manuscript received: April 3, 1989